European Girl's Mathematical Olympiad 2012

Pierre-Alain Jacqmin et Michel Sebille

La participation féminine aux olympiades internationales étant faible voire pour certains pays quasiment inexistante, il a été décidé d'organiser une compétition réservée exclusivement aux filles. Le comité de sélection des questions prit la décision de choisir des questions du même niveau que l'OMI afin de montrer que les participantes ne font pas de moins bons résultats que leurs homologues masculins. Cette compétition fut baptisée « European Girl's Mathematical Olympiad 2012 » abrégée en :


Élise Delhez (BEL), Laura Gremion (SUI), Charlotte Junod (SUI) et Sophie Peng (BEL) sous l'œil bienveillant d'Isaac Newton

Des participantes venant de 19 pays se sont affrontées : Arabie Saoudite, Belgique, Bulgarie, Finlande, Hongrie, Indonésie, Irlande, Italie, Lettonie, Luxembourg, Pays-Bas, Pologne, Roumanie, Royaume-Uni, Serbie, Suisse, Turquie, Ukraine, USA. La Belgique était représentée par Élise Delhez, Sophie Peng (participantes), Michel Sebille (leader) et Pierre-Alain Jacqmin (deputy leader).

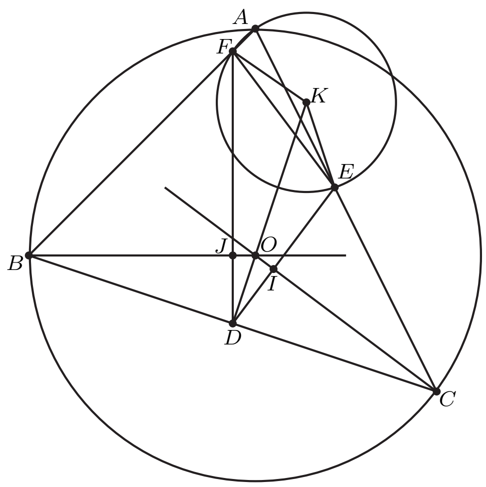
La compétition s'est déroulée du 10 au 16 avril à Cambridge, au département de mathématiques et au Mary Edwards College. Le 11, les participantes ont fait du sport pendant que le jury traduisait les questions. Le 12 et le 13, au matin les filles affrontaient les questionnaires tandis que le jury attendait les copies pour se lancer dans les corrections. Le 14, pendant que les coordinateurs et les correcteurs se mettaient d'accord, les participantes visitaient Cambridge et apprennaient à dompter les bateaux locaux debout et sans tomber à l'eau. Le 15, après avoir visité Bletchley Park (centre de cryptographie anglais durant la seconde guerre mondiale), les participantes recevaient les prix tant attendus.

Les questionnaires étaient constitués de quatre problèmes par jour et les concurrentes disposaient de 4h30 pour y répondre. Chaque questionnaire se terminait par un problème plus ardu afin de départager les meilleures. Néanmoins, les résultats furent serrés. Au classement des nations, la Pologne ne bat la Roumanie que d'un point, tandis que Danielle WANG (USA) et Pavlena NENOVA (Bulgarie) se partagent la première place avec un point d'avance sur Simona DIACONU (Roumanie). La Belgique, ne disposant que d'une demi-équipe, termine 18[e] ; Sophie PENG obtenant une mention honorable. Les résultats complets sont disponibles sur le site internet d'EGMO 2012.

Voici les questions ainsi que les solutions à l'exception de celles des questions 4 et 8 plus pointues.

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Les points D, E et F sont respectivement situés à l'intérieur des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que DE soit perpendiculaire à CO et DF soit perpendiculaire à BO (Par *intérieur*, nous voulons dire, par exemple, que le point D se trouve sur la droite BC et que D est situé entre B et C). Soit K le centre du cercle circonscrit du triangle AFE. Prouver que les droites DK et BC sont perpendiculaires.

Solution de Sophie Peng



Soient I le point d'intersection de ED et OC, J le point d'intersection de FD et OB, Γ_1 le cercle circonscrit à ABC et Γ_2 le cercle circonscrit à AFE.
Dans le cercle Γ_1, $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et $\widehat{BOC}$ est un angle au centre interceptant le même arc. On a donc

$$|\widehat{BOC}| = 2|\widehat{BAC}| \tag{1}$$

De même, dans le cercle Γ_2, $\widehat{FAE}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{FE}$ et $\widehat{FKE}$ est un angle au centre interceptant le même arc. On a donc

$$|\widehat{FKE}| = 2|\widehat{FAE}| = 2|\widehat{BAC}| \tag{2}$$

Ainsi, nous avons

$$|\widehat{BOC}| \overset{(1)}{=} 2|\widehat{BAC}| \overset{(2)}{=} |\widehat{FKE}| \tag{3}$$

Par hypothèse, $|\widehat{OJD}| = |\widehat{OID}| = 90°$, on en déduit que le quadrilatère $OIDJ$ est cyclique. Ainsi, $|\widehat{JDI}| + |\widehat{JOI}| = 180°$, soit

$$|\widehat{JOI}| = 180° - |\widehat{JDI}| \tag{4}$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\widehat{FKE}| &\overset{(3)}{=} |\widehat{BOC}| \\ &= |\widehat{JOI}| \\ &\overset{(4)}{=} 180° - |\widehat{JDI}| \\ &= 180° - |\widehat{FDE}| \end{aligned}$$

Le quadrilatère $FKED$ est par conséquent cyclique. On en déduit

$$|\widehat{KFE}| = |\widehat{KDE}| \tag{5}$$

et

$$|\widehat{KEF}| = |\widehat{KDF}| \tag{6}$$

Or, K étant le centre du cercle circonscrit au triangle AFE, on a $|KF| = |KE|$, le triangle KFE est donc isocèle. On a alors

$$|\widehat{KFE}| = |\widehat{KEF}| = \alpha \tag{7}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\widehat{KDF}| &\overset{(6)}{=} |\widehat{KEF}| \\ &\overset{(7)}{=} |\widehat{KFE}| \\ &\overset{(5)}{=} |\widehat{KDE}| \\ &= \alpha \end{aligned}$$

et plus particulièrement

$$|\widehat{FDK}| = |\widehat{KDE}| = \alpha. \qquad (8)$$

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, d'où $|OB| = |OC|$. De même que précédemment, on en déduit que

$$|\widehat{OBC}| = |\widehat{OCB}| \qquad (9)$$

D'autre part, le triangle BJD est rectangle en J, donc $|\widehat{JBD}| + |\widehat{JDB}| = 90°$ soit

$$|\widehat{JDB}| = 90° - |\widehat{JBD}| = \beta \qquad (10)$$

De même, dans le triangle CDI rectangle en I : $|\widehat{IDC}|+|\widehat{ICD}| = 90°$ soit $|\widehat{IDC}| = 90°-|\widehat{ICD}|$. On a alors

$$\begin{aligned} |\widehat{IDC}| &= 90° - |\widehat{ICD}| \\ &= 90° - |\widehat{OCB}| \\ &\overset{(9)}{=} 90° - |\widehat{OBC}| \\ &= 90° - |\widehat{JBD}| \\ &\overset{(10)}{=} \beta. \end{aligned}$$

Soit

$$|\widehat{IDC}| = |\widehat{JDB}| = \beta \qquad (11)$$

Les points B, D et C étant alignés dans cet ordre, on a :

$$\begin{aligned} & |\widehat{BDC}| = 180° \\ \Longleftrightarrow\ & |\widehat{BDF}| + |\widehat{FDK}| + |\widehat{KDE}| + |\widehat{EDC}| = 180° \\ \Longleftrightarrow\ & |\widehat{BDJ}| + |\widehat{FDK}| + |\widehat{KDE}| + |\widehat{IDC}| = 180° \\ \underset{(11)}{\overset{(8)}{\Longleftrightarrow}}\ & \beta + \alpha + \alpha + \beta = 180° \\ \Longleftrightarrow\ & 2(\alpha + \beta) = 180° \\ \Longleftrightarrow\ & \alpha + \beta = 90° \\ \underset{(11)}{\overset{(8)}{\Longleftrightarrow}}\ & |\widehat{BDF}| + |\widehat{FDK}| = 90° \\ \Longleftrightarrow\ & KD \perp BD \end{aligned}$$

Ainsi, $DK \perp BC$.

Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus grand entier positif m satisfaisant la propriété suivante : un tableau à m lignes et n colonnes peut être rempli par des nombres réels afin que pour toute paire de lignes $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ et $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ on ait que

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Premièrement, prouvons que $m \leqslant 2^n$. Supposons par l'absurde qu'un tel tableau $T = (t_{ij})$ existe pour $m \geqslant 2^n + 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la première ligne est composée entièrement de 0. Il doit donc y avoir au moins un 1 ou un -1 dans chaque colonne. Quitte à multiplier les éléments d'une colonne par -1, nous pouvons supposer qu'il y a au moins un 1 dans chaque colonne. Dès lors, tous les éléments de T doivent appartenir à l'ensemble $[0; 1]$. Formons $T' = t'_{ij}$, un tableau à m lignes et n colonnes tel que $t'_{ij} = 0$ si $t_{ij} \in [0; 1[$ et $t'_{ij} = 1$ si $t_{ij} = 1$. Pour tous i, j, k, nous avons donc bien que $|t'_{ij} - t'_{kj}| \leqslant 1$. De plus, pour tout choix de deux lignes différentes i et k, il existe un $1 \leqslant j \leqslant n$ tel que $|t'_{ij} - t'_{kj}| = 1$. En effet, il existe j satisfaisant $|t_{ij} - t_{kj}| = 1$. Mais $t_{ij}, t_{kj} \in [0; 1]$, donc $t_{ij} = 0$ et $t_{kj} = 1$ (ou inversément). Dès lors, $|t'_{ij} - t'_{kj}| = 1$. Nous avons donc formé un tableau avec au moins $2^n + 1$ lignes, constitué uniquement de 0 et de 1 et satisfaisant la propriété de l'énoncé. Mais il n'est pas possible de fabriquer plus de 2^n lignes différentes. Par le principe des tiroirs, il y a donc deux lignes identiques, ce qui est absurde.

Il reste à prouver que cette borne peut être atteinte. Il suffit pour cela de former les tableaux constitués des 2^n lignes différentes que l'on peut faire avec des 0 et des 1. La propriété est alors trivialement respectée.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

En remplaçant y par 0, on a

$$f(f(x)) = 4x \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, $f \circ f$ est bijective. Par conséquent, f est aussi bijective.

Nous pouvons aussi en déduire que

$$f(4x) = f(f(f(x))) = 4f(x) \tag{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. De là découle $f(0) = 4f(0)$ et donc $f(0) = 0$.

Par bijectivité de f, nous savons qu'il existe un unique réel k tel que $f(k) = 4$. Maintenant, en substituant dans l'équation x par 0 et y par k, nous pouvons dire que

$$f(4k) = 8k. \tag{3}$$

En utilisant (2), nous obtenons

$$16 = 4f(k) = f(4k) = 8k. \tag{4}$$

Dès lors, $k = 2$ et $f(2) = 4$. De plus, par (1), nous savons que $f(f(1)) = 4 = f(2)$ et donc $f(1) = 2$ par injectivité de f.

Finalement, en substituant dans l'équation y par $1 - x$, nous remarquons que

$$f(2(1-x) + f(x)) = 4x + 4(1-x) = 4 = f(2). \tag{5}$$

Par injectivité de f, cela se réduit à $2 - 2x + f(x) = 2$ ou $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit maintenant de montrer que ceci est bien une solution, ce qui est trivial puisque dans ce cas,

$$\begin{aligned} f(yf(x+y) + f(x)) &= 4x + 4xy + 4y^2 \\ &= 4x + 2yf(x+y) \end{aligned}$$

Un ensemble A d'entiers est dit *somme-clos* si $A \subseteq A + A$, c-à-d tout élément $a \in A$ est la somme de deux éléments $b, c \in A$ (qui ne sont pas nécessairement distincts). Un ensemble A d'entiers est dit *somme-nulle-absente* si 0 est le seul entier qui ne peut s'exprimer comme la somme des éléments d'un sous-ensemble fini non-vide de A.
Existe-t-il un ensemble d'entiers qui soit somme-clos et somme-nulle-absente ?

Le lecteur intéressé vérifiera que

$$A = \{F_{2n} | n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{-F_{2n+1} | n \in \mathbb{N}_0\}$$

(où F_i est le i^{e} nombre de Fibonacci) est un tel ensemble en appliquant la représentation de Zeckendorf (un mathématicien belge) et un algorithme glouton ([1])

Les nombres premiers p et q satisfont

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

pour un certain nombre entier strictement positif n. Trouver toutes les valeurs possibles de $q - p$.

([1]) Aucun participant ni membre du jury n'ayant trouvé d'autre exemple que l'ensemble A, nous sommes intéressés par tout résultat sur le sujet.

Solution d'Élise Delhez

En soustrayant 2 aux deux membres de l'équation, nous obtenons

$$\frac{-1}{p+1}+\frac{1}{q}=\frac{-4}{n+2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{4}{n+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q} \tag{6}$$

L'entier n étant positif, le membre de gauche l'est strictement et donc

$$\frac{1}{p+1}>\frac{1}{q}$$

$$\iff p+1<q \iff q-p>1 \tag{7}$$

Soient p et q différents de 2. Ils sont donc impairs et $q-p$ est pair non nul.

1. Si $q-p=2$, (6) devient

$$\frac{4}{n+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2} \iff n=4(p+1)(p+2)-2$$

Nous obtenons ainsi une valeur entière et positive pour n.

2. Si $q-p=2t$ ou $q=p+2t$ où t est un naturel strictement supérieur à 1, l'égalité (6) devient

$$\frac{4}{n+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2t}$$
$$\iff 4(p+1)(p+2t)=(n+2)(2t-1)$$

Puisque $1<2t-1<q=p+2t$, on a que $2t-1$ est premier avec $4(p+2t)$ et doit donc diviser $p+1$. Mais si $2t-1|p+1$, alors $2t-1|p+1+2t-1$, c'est-à-dire $2t-1|q$ ce qui est impossible.

Regardons maintenant les cas où $p=2$ ou $q=2$.

1. Il n'est pas possible d'avoir $q=2$ par (7).
2. Si $p=2$, l'égalité (6) devient (puisque $n=10$ n'est pas possible)

$$\frac{4}{n+2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{q}$$

$$\iff q=\frac{3n+6}{n-10}=3+\frac{36}{n-10} \tag{8}$$

Dès lors $n-10$ est un des neuf diviseurs de 36, mais seuls 9 et 18 donnent un nombre q premier. Ce nombre q doit donc valoir 5 ou 7. La différence $q-p$ doit donc prendre les valeurs 3 ou 5 (n étant égal à 19 ou 28).

Pour résumer $q-p\in\{2,3,5\}$.

Il y a un nombre infini de personnes enregistrées sur le réseau social *Facedebouc*. Des paires d'utilisateurs sont enregistrées comme *amis*, mais chaque personne ne peut avoir qu'un nombre fini d'amis. Chaque utilisateur possède au moins un ami. *(L'amitié est symétrique ; c-à-d que si A est un ami de B, alors B est aussi un ami de A.)*
Toute personne doit désigner un de ses amis comme étant son *meilleur ami*. Si A désigne B comme étant son meilleur ami, il ne s'en suit (malheureusement) pas que B choisisse nécessairement A pour meilleur ami. Une personne désignée meilleur ami est appelée *1-meilleur ami*. Plus généralement, si $n>1$ est un entier positif, alors un utilisateur est appelé *n-meilleur ami* si et seulement si il est désigné meilleur ami par un *$(n-1)$-meilleur ami*. Quelqu'un qui est *k-meilleur ami* pour tout entier strictement positif k est appelé *populaire*.
Prouver que toute personne populaire est le meilleur ami d'une autre personne populaire.
Montrer que si on pouvait avoir un nombre infini d'amis, il serait possible qu'une personne populaire ne soit le meilleur ami d'aucune autre personne populaire.

Pour qu'une personne soit un k-meilleur ami, il faut qu'il existe une suite $a_0, a_1, \ldots, a_k$ d'utilisateurs telle que a_i a désigné a_{i+1} comme meilleur ami pour tout $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Il existe donc aussi une suite $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_k$ d'utilisateurs telle que a_i a désigné a_{i+1} comme meilleur ami pour tout $i \in \{l, l+1, l+2, \ldots, k-1\}$. Ainsi un k-meilleur ami est aussi un $(k-l)$-meilleur ami ; il est donc un j-meilleur ami pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $(*)$.

Si une personne populaire possède un nombre fini d'amis, on doit y trouver un 1-meilleur ami, un 2-meilleur ami, ..., c'est-à-dire un k-meilleur ami pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Par le principe des tiroirs, l'un d'entre eux doit être un k-meilleur ami pour une infinité de valeurs de k et donc pour toutes les valeurs possibles de k par $(*)$; c'est-à-dire une personne populaire.

Par contre, si une personne populaire peut avoir une infinité d'amis, elle pourrait avoir été désignée meilleur ami par des personnes étant k-meilleur ami pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais pas $(k+1)$-meilleur ami. Il est dès lors obligatoire que cette personne populaire ait désigné comme meilleur ami quelqu'un qui ne lui a pas rendu la pareille.

Soit ABC un triangle acutangle dont le cercle circonscrit est nommé Γ et l'orthocentre H. Soit K un point de Γ tel que A et K soient situés de part et d'autre de BC. Soit L le symétrique de K par rapport à AB et M le symétrique de K par rapport à BC. Soit E le second point d'intersection de Γ avec le cercle circonscrit au triangle BLM. Montrer que les droites KH, EM et BC sont concourantes. *(L'orthocentre d'un triangle est l'intersection de ses hauteurs.)*

Puisque le quadrilatère $BMEL$ est cyclique, $|\widehat{BEM}| = |\widehat{BLM}|$. Or, par construction, $|BK| = |BL| = |BM|$ et donc

$$\begin{aligned}
|\widehat{BLM}| &= 90° - \frac{|\widehat{MBL}|}{2} \\
&= 90° - \left(180° - \frac{|\widehat{KBL}|}{2} - \frac{|\widehat{KBM}|}{2}\right) \\
&= \left(\frac{|\widehat{KBL}|}{2} + \frac{|\widehat{KBM}|}{2}\right) - 90° \\
&= (180° - |\widehat{B}|) - 90° = |\widehat{BAH}|
\end{aligned}$$

Ainsi, $|\widehat{BEM}| = |\widehat{BAH}|$ et le point d'intersection N entre EM et AH appartient à Γ. Soient X le point d'intersection entre KH et BC, et N' le point d'intersection entre MX et AH. Puisque, par construction, BC est la médiatrice de $[KM]$, KXM est isocèle et en utilisant que MK est parallèle à AH, HXN' est lui aussi isocèle. Mais AH étant perpendiculaire à BC, N' est le symétrique de H par rapport à BC et appartient à Γ (le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté appartient au cercle circonscrit). Les points N et N' sont dès lors confondus. Ainsi, les points E, M, X et N sont alignés et KH, EM et BC sont concourantes.

Un *mot* est une suite finie de lettres d'un certain alphabet. Un mot est *répétitif* s'il est la juxtaposition d'au moins deux séquences identiques (par exemple *ababab* et *abcabc* sont répétitifs, mais *ababa* et *aabb* ne le sont pas). Prouver que si un mot a la propriété qu'en interchangeant toute paire de lettres adjacentes, on obtient un mot répétitif, alors toutes ses lettres sont identiques. (On peut interchanger deux lettres adjacentes identiques laissant ainsi le mot inchangé).

Le lecteur intéressé par cette question très pointue cherchera à appliquer le théorème de Wilf-Fine.